Der zufällige unendliche Graph

Hier immer ungerichtete abzählbare Graphen ohne Schleifen.
(Wofür zufällige Graphen? probabilistische Methode von Erdos, Anwendung in Netzwerksystemen.)

Definition (Gilbert-Verteilung) Sei $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Sei G ein zufälliger Graph mit Ecken $V = \{1, \ldots, n\}$ bzw. $V = \mathbb{N}$
und Kanten: $P(x \bullet\!\!-\!\!\bullet\, y) = p$, unabhängig für alle $x, y \in V$, $x \neq y$.
Die Verteilung solcher Graphen $G \sim G(n,p)$ heißt *Gilbert-Verteilung.*

Lemma Für $p \in (0,1)$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} P_{G_i \sim G(n,p)}(G_1 \cong G_2) = 0$$

d.h. zwei endliche zufällige Graphen sind asymptotisch fast sicher nicht isomorph.

Satz/Definition (Rado-Graph) Für $p_1, p_2 \in (0,1)$ gilt

$$P_{G_i \sim G(\infty, p_i)}(G_1 \cong G_2) = 1$$

Bis auf eine Nullmenge liegen alle unendlichen zufälligen Graphen in derselben Isomorphieklasse. Ein solcher Graph heißt *Rado-Graph.*
(Rest des Vortrages: Beweis dieses Resultates und bemerkenswerte Eigenschaften. Die folgende Eigenschaft ist definierend für den Rado-Graph.)

Definition Ein Graph $G = (V, E)$ erfüllt die *Erweiterungseigenschaft* $:\iff \forall U, W \subset V$ endlich, disjunkt $\exists x \in V \setminus (U \cup W)$ sodass x zu allen Ecken in U benachbart und zu allen Ecken in W nicht benachbart ist.

Lemma Für $p \in (0,1)$, hat $G \sim G(\infty, p)$ fast sicher die Erweiterungseigenschaft.

Beweis Seien $U, W \subset V$ wie oben. Eine beliebige Ecke $x \in V \setminus (U \cup W)$ erfüllt das Gewünschte mit Wahrscheinlichkeit $p^{|U|}(1-p)^{|W|} > 0$. Da es unendlich viele Ecken gibt und die Kanten unabhängig voneinander sind, gibt es fast sicher eine Ecke x, die die gewünschte Eigenschaft hat. Bis jetzt nur gezeigt: Für feste U, V gibt es fast sicher so ein x. Da es nur abzählbar viele solche Mengenpaare U, W gibt, genügt das aber schon. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

Lemma (Universelle Eigenschaft) Ein Graph G mit Erweiterungseigenschaft enthält jeden abzählbaren Graphen G' als induzierten Teilgraphen.
(ein solcher Graph ist also eine Art klassifizierender Raum für Graphen)

Beweis: Beweis: Sei $V' = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Abzählung der Ecken von G'. Wähle $\psi(x_1) \in V$ beliebig. Erweiterungseigenschaft: Wähle rekursiv $\psi(x_k) \in V$, sodass

$$\forall i < k \colon \psi(x_k) \bullet\!\!-\!\!\bullet\, \psi(x_i) \iff x_k \bullet\!\!-\!\!\bullet\, x_i$$

$\implies$ ψ ist ein Graphen-Isomorphismus auf sein Bild.

Lemma Zwei abzählbare Graphen G_1, G_2 mit der Erweiterungseigenschaft sind isomorph.

Beweis Diesmal wollen wir eine Bijektion konstruieren. Dazu ordne in jedem Schritt der kleinsten (bzgl. einer festen Abzählung) noch nicht zugeordneten Ecke von G_1 wie oben eine Ecke aus G_2 zu, sodass die bereits zugeordeten Ecken isomorphe Teilgraphen induzieren. Danach wiederhole dies für G_2, immer abwechselnd. Dies ergibt einen Isomorphismus, da jede Ecke irgendwann zugeordnet wird.

Damit ist der Satz über die Existenz des Rado-Graphes bewiesen. Weitere Eigenschaften:

Korollar (aus dem Beweis) G_{Rado} ist ultrahomogen, d.h. jeder Isomorphismus von induzierten Teilgraphen lässt sich zu einem Automorphismus von G_{Rado} fortsetzen.
Der Rado-Graph hat also eine große Automorphismengruppe (sogar gleichmächtig zum Kontinuum). Dagegen gilt folgendes

Lemma

$$\lim_{n \to \infty} P_{G \sim G(n, \frac{1}{2})}(\text{Aut}(G) \cong 1) = 1$$

d.h. fast alle endlichen Graphen haben triviale Automorphismengruppen.

Lemma Der Rado-Graph ist zirkulant, hat also eine Ecken-transitive Gruppenwirkung einer zyklischen Gruppe.

Beweisskizze Wähle eine zufällige Menge $S \subset \mathbb{N}$, sodass $P(n \in S) = \frac{1}{2}$ unabhängig, $V = \mathbb{Z}$, $x \bullet\!\!-\!\!\bullet\, y \iff |y - x| \in S$. Der entstehende Graph ist zirkulant ($\mathbb{Z}$ wirkt auf V durch Addition) und fast sicher isomorph zum Rado-Graphen.

Korollar (aus dem Beweis) Der Rado-Graph enthält einen Hamiltonpfad, dessen Translationen Isomorphismen sind, da $P(1 \in S) > 0$.

Lemma Eine Aussage in Prädikatenlogik erster Stufe gilt genau dann für den Rado-Graphen, wenn sie für fast alle endlichen Graphen gilt, d.h. $\lim_{n\to\infty} P_{G\sim G(n,\frac{1}{2})}(G \text{ erfüllt Eigenschaft}) = 1$.
Solche Aussagen für den Rado-Graphen sind entscheidbar.
(erste Stufe bedeutet: Quantoren sind erlaubt, aber nur z.B. über die Elemente der Ecken und Kantenmenge, nicht z.B. über alle Teilmengen einer Menge)

Korollar Der Rado-Graph und fast alle endlichen Graphen

- haben Durchmesser 2
- sind zusammenhängend (wegen endlichem Durchmesser)
- enthalten einen festen Graphen als induzierten Teilgraphen.
- haben Taillenweite 3 (da sie K_3 enthalten)
- sind nicht planar (da sie K_5 enthalten)
- ...