Karlsruhe–Stuttgart Seminar „Formalität“

Das Seminar findet vom 3. Juni bis zum 6. Juni 2015 im Hohenwartforum in Pforzheim statt. Wir wollen uns den Begriff der „Formalität“, wie er in der rationalen Homotopietheorie essentiell ist, erschließen und ihn in einer Vielzahl geometrischer Kontexte diskutieren, bevor wir ihn in Kontrast zum Begriff der „geometrischen Formalität“ setzen.

Wir wollen im wesentlichen dem Buch [1] folgen. Als weitere Referenzen zu den behandelten Themen und für ergänzendes Material zu den jeweiligen Vorträgen sei stets auf [4] und [5] verwiesen.

Die einzelnen Vorträge sollten jeweils ca. eine Länge von 70-75 Minuten haben.

Vorträge

3.6., 14.00-15.15 Uhr: Einführung in die Rationale Homotopietheorie (Manuel Amann).
Grundkonzepte der Rationalen Homotopietheorie, Sullivan Modelle und deren Konstruktion, Definition/Motivation von Formalität.
Literatur: [1, Kapitel 1,3,4,5, 8.1]

3.6., 15.45-17.00 Uhr: Beispiele und Eigenschaften (Anton Reiswich).
konkrete Beispiele: insbesondere Produkte, Heisenberg-Mannigfaltigkeit, H-Räume, kompakte Lie-Gruppen und deren klassifizierende Räume.
Literatur: [1, Kapitel 6.1.1, 8.1.1, 8.1.2], [4, Example 3, p. 143]

4.6., 9.00-10.15 Uhr: Massey-Produkte und s-Formalität I (Manuel Amann).
Wir wollen einsehen, dass ein Raum genau dann formal ist, wenn seine Massey Produkte „uniform verschwinden“. Definition von Massey-Produkten, Massey-Produkte als Obstruktion

zu Formalität, nicht-formale Räume mit verschwindenden Massey-Produkten, s-**Formalität (und Mannigfaltigkeiten)**, Anwendungen. Vorsicht: Beweise zu Massey-Produkten verwenden s-Formalität, beide Konzepte sollten also geeignet parallel eingeführt werden.
Literatur: [1, Kapitel 8.2, 8.4], [6], [7]

4.6., 10.45-12.00 Uhr: Massey-Produkte und s-Formalität II (Roman Sauer).
s.o.
Literatur: [1, Kapitel 8.2, 8.4], [6], [7]

4.6., 14.00-15.15 Uhr: Homogene Räume (Manuel Amann).
Wir wollen verstehen, dass ein homogener Raum positiver Eulercharakteristik formal ist und dass $\mathbf{SU}(6)/(\mathbf{SU}(3)\mathbf{SU}(3))$ ein nicht formaler homogener Raum ist. Dazu konstruieren wir ein Sullivan Modell von homogenen Räumen. Wir verwenden dies dann für konkrete Berechnungen mit Massey Produkten, die die fehlende Formalität im Beispiel liefern. Für die erste Beobachtung verwenden wir Korollar 8.1.11.
Literatur: [1, Kapitel 6], [1, Example 8.4.4], [1, Abschnitt 8.1.2]

4.6., 15.45-17.00 Uhr: Formalität von n-symmetrischen Räumen (Andreas Kollross).
Es soll bewiesen werden, dass n-symmetrische Räume formal sind. Es existiert einmal ein einfacher Beweis für homogene Räume einfacher Lie-Gruppen, sowie v.a. einer ohne diese Einschränkung. Die Beweise unterscheiden sich vom klassischen Zugang zur Formalität von symmetrischen Räumen, der später unter geometrischer Formalität behandelt wird.
Literatur: [8], [11]

5.6., 9.00-10.15 Uhr: Kähler Mannigfaltigkeiten und verwandte Strukturen (Mark Hamilton).
Wir betrachten einige Konstrukte der Riemannschen Geometrie, die Querverbindungen zu Formalität erlauben. Formalität von Kähler Mannigfaltigkeiten, Formalität und spezielle Holonomie, Formalität vs. Hard-Lefschetz, (kohomologisch) symplektische Strukturen, etc.
Literatur: [1, Kapitel 8.8]

5.6., 10.45-12.00 Uhr: Geometrische Formalität (Konstantin Heil).
Geometrische Formalität stellt eine starke, geometrisch definierte Eigenschaft dar, die zudem direkt Formalität impliziert. Geometrische Formalität vs. Formalität. Topologische Implikationen, Existenz nicht-formaler Metriken, (nicht homogene) Beispiele.
Literatur: [9], [1, Kapitel 8.6]

6.6., 9.00-10.15 Uhr: Geometrische Formalität und homogene Strukturen (Tillmann Jentsch).
Wir betrachten geometrische Formalität auf homogenen Räumen. Geometrische Formalität symmetrischer Räume, Beispiele von nicht geometrisch formalen n-symmetrischen Räumen und von Klassen geometrisch formaler homogener Räume.
Literatur: [1, Kapitel 8.6], [12], [13]

6.6., 10.45-12.00 Uhr: Geometrisch formale 3- und 4-Mannigfaltigkeiten (Uwe Semmelmann).
Wir betrachten zuerst kurz verschiedentlich positiv/nicht-negativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten und (vermutete) Verbindungen zu Formalität. Wir diskutieren im folgenden 3-Mannigfaltigkeiten bzw. 4-Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalar-/(Schnitt-)Krümmung im Kontext der geometrischen Formalität.
Literatur: [1, Abschnitte 7.5.2, 8.6.5], [10], [3]

Kontakt:
Manuel Amann, manuel.amann@kit.edu
Uwe Semmelmann, uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de

Literaturverzeichnis

[1] M. Amann. *Rational Homotopy Theory.* Preprint, 396 Seiten, 2014.

[2] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo. *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, volume 44 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[3] C. Bär. Geometrically formal 4-manifolds with nonnegative sectional curvature. arXiv:1212.1325v2, 2012.

[4] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[5] Y. Félix, J. Oprea, and D. Tanré. *Algebraic models in geometry*, volume 17 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

[6] M. Fernández and V. Muñoz. Formality of Donaldson submanifolds. *Math. Z.*, 250(1):149–175, 2005.

[7] M. Fernández and V. Muñoz. Erratum: "Formality of Donaldson submanifolds" [Math. Z. **250** (2005), no. 1, 149–175; mr2136647]. *Math. Z.*, 257(2):465–466, 2007.

[8] O. Goertsches and S. H. Noshari. Equivariant formality of isotropy actions on homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms arXiv:1405.2655, 2015.

[9] D. Kotschick. On products of harmonic forms. *Duke Math. J.*, 107(3):521–531, 2001.

[10] D. Kotschick. Geometric formality and non-negative scalar curvature. arXiv:1212.3317v4, 2013.

[11] D. Kotschick and S. Terzić. On formality of generalized symmetric spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 134(3):491–505, 2003.

[12] D. Kotschick and S. Terzić. Chern numbers and the geometry of partial flag manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 84(3):587–616, 2009.

[13] D. Kotschick and S. Terzić. Geometric formality of homogeneous spaces and of biquotients. *Pacific J. Math.*, 249(1):157–176, 2011.

[14] D. Notbohm and N. Ray. On Davis-Januszkiewicz homotopy types. I. Formality and rationalisation. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:31–51 (electronic), 2005.

[15] T. E. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In *Toric topology*, volume 460 of *Contemp. Math.*, pages 293–322. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.