Prof. Dr. R. Sauer
Dr. M. Amann

Wintersemester 2012
KIT Karlsruhe

Vortragsplan: Systolische Geometrie

Die Vorträge finden jeweils mittwochs, 9:45–11:15 Uhr, in Raum 1C-04 in Gebäude 05.20 statt und sollten, wenn möglich, 70–75 Minuten dauern.

Vortrag 1 (Einführung)**.** Vorstellung der systolischen Ungleichung. Beweisstrategie. Der Fall des Torus. …„eine cineMATHographische MATHinée“…
Datum: 7.11.2012
Literatur: [11] und [15]

Vortrag 2 (Asphärische und essentielle Mannigfaltigkeiten)**.** Theorem 1.1 in [16]. Beispiele von asphärischen Mannigfaltigkeiten. Beispiele von essentiellen, aber nicht-asphärischen Mannigfaltigkeiten. Z.B.: Die zusammenhängende Summe von essentiellen Mannigfaltigkeiten ist wieder essentiell, die zusammenhängende Summe von asphärischen Mannigfaltigkeiten aber in der Regel nicht asphärisch; weiteres Beispiel ist $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ mit $n \geq 1$ ungerade. Was ist ein $K(\pi, 1)$?
Datum: 14.11.2012
Vortragender: Sabine Braun
Literatur: [16, Abschnitte 1 und 2] und [8, Abschnitt 0] und [14, Kapitel 1.B.]

Vortrag 3 (Systolische Ungleichung I)**.** Definition der 1-Systole einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Regularitätsfragen von Systolen. Formulierung der systolischen Ungleichung für essentielle Mannigfaltigkeiten. Definition des Füllradius einer Riemannschen Mannigfaltigkeit über die Kuratowski-Einbettung $K : M \to L^\infty(M)$. Beispiele von Füllradien (vgl. [8].1, S. 7). Formulierung von Theorem A (dies gilt gleichermaßen für essentielle Mannigfaltigkeiten) und Theorem B aus [9].
Datum: 21.11.2012
Vortragender: Michael Wiemeler
Literatur: [9, S. 113–115 Lemma 1]

Vortrag 4 (Systolische Ungleichung II)**.** Beweis von Theorem A aus [9] für essentielle Mannigfaltigkeiten und die Kuratowski-Einbettung $M \to L^\infty(M)$. Grundlage ist der Beweis von Lemma 1.2.B. auf S. 9 f. in [8] (mit $K := B\pi_1(M)$). Die Idee des Beweises ist auch in [9, Beweis von Lemma 4] schön erklärt. Man erhält daraus Lemma 1.2.B in [8] durch Komposition mit der klassifizierenden Abbildung $c : K(M) \to B\pi_1(M)$. Diese kann unter der Widerspruchsannahme in Guths Beweis auf den Füllzykel $C \subset L^\infty(M)$ ausgedehnt werden. Dazu reicht es wie in [8] aus, die Abbildung c auf das 2-Skelett von C auszudehen – die weiteren Ausdehnungen erledigt man mit der Asphärizität von $B\pi_1(M)$.
Datum: 28.11.2012
Vortragender: Martin Hermann
Literatur: [8] und [9]

Vortrag 5 (Systolische Ungleichung III)**.** Diskussion der approximierenden Kuratowski-Einbettungen $K_S : M \to L^\infty(S)$, insbesondere von Lemma 2 in [9] und dessen Beweis (dieser ist in der angegebenen Quelle leider nur skizziert). Formulierung und kurze Diskussion der Abschwächung von Theorem A aus [9] wie in Lemma 4 von [9]. Neuformulierung von Theorem B (vgl. [9, S. 117 unten]).
Datum: 5.12.2012
Vortragender: Malte Röer
Literatur: [9]

Vortrag 6 (Systolische Ungleichung IV)**.** Definition des Volumens für stückweise glatte n-Ketten im normierten Raum $(l_\infty)^N$. Koflächenformel und Kegelungleichung.
Datum: 12.12.2012
Vortragender: Manuel Amann

Vortrag 7 (Systolische Ungleichung V)**.** Formulierung und Beweis der Federer-Fleming-Ungleichung in $(l_\infty)^N$ mit einem Faktor C_N.
Datum: 23.1.2013
Vortragender: Werner Thumann
Literatur: [9, erstes Theorem(Federer–Fleming) auf S. 118 bis Corollary auf S. 121]

Vortrag 8 (Systolische Ungleichung VI)**.** Beweis von Theorem B auf [9, S. 117]. Abschluss des Beweises der systolischen Ungleichung. Abschätzung der Konstante C_n.
Datum: 30.1.2013
Vortragender: Roman Sauer
Literatur: [20]

Literatur

[1] F. Almgren. Optimal isoperimetric inequalities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 13, pp. 123-126, 1985.

[2] F. Almgren. Optimal isoperimetric inequalities. *Indiana Univ. Math. J.* 35, pp. 451-547, 1986.

[3] M. Berger. A panoramic view of Riemannian geometry, *Springer*, 2003.

[4] M. Berger. What is . . . a systole? *Notices Amer. Math. Soc.*, 55(3), pp. 374–376, 2008.

[5] Th. Bröcker, K. Jänich. Einführung in die Differentialtopologie. *Springer*, 1973.

[6] Yu. D. Burago, V. A. Zalgaller. Geometric inequalities, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 285 , Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1988.

[7] M. Gromov. Volume and bounded cohomology, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 56 (1982), pp. 5–99, 1983.

[8] M. Gromov. Filling Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.*, 18(1), pp. 1–147, 1983.

[9] L. Guth. Notes on Gromov's systolic estimate, *Geom. Dedicata*, 123, pp. 113–129, 2006.

[10] L. Guth. Systolic inequalities and minimal hypersurfaces, *Geom. Funct. Anal.*, 19(6), pp. 1688–1692, 2010.

[11] L. Guth. Metaphors in Systolic Geometry, talk at the Institute for Advanced Study, Princeton, 2010.
Video erhältlich unter http://video.ias.edu/stream&ref=474

[12] L. Guth. Metaphors in systolic geometry, preprint, arXiv:1003.4247v1 [math.DG], 2010.

[13] L. Guth. Volumes of balls in large Riemannian manifolds, *Ann. of Math. (2)*, 173(1), pp. 51–76, 2011.

[14] A. Hatcher. Algebraic Topology, *Cambridge University Press*, 2002.

[15] M.G. Katz. Systolic geometry and topology, *Mathematical Surveys and Monographs*, 137, American Mathematical Society, 2007.

[16] W. Lück. Survey on aspherical manifolds, *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010

[17] W. Lück. Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten. *Vieweg+Teubner*, 2005.

[18] R. Ossermann. The isoperimetric inequality, *Bull. AMS*, 84, pp. 1182-1238, 1978.

[19] R. Ossermann. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer. Math. Monthly*, 86, pp. 1-29, 1979.

[20] S. Wenger. A short proof of Gromov's filling inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(8), pp. 2937–2941, 2008.