# Volumen und $L^2$-Bettizahlen asphärischer Mannigfaltigkeiten

Roman Sauer

WWU Münster

Stuttgart
Oktober 2008

# Topologie und Geometrie von Mannigfaltigkeiten

- Topologie: Studium von Eigenschaften und Invarianten, die unter Homotopieäquivalenzen oder Homöomorphismen invariant sind.
- Geometrie: Studium von metrischen Eigenschaften und Invarianten von Riemannschen Mannigfaltigkeiten
- Zusammenhänge zwischen topologischen und geometrischen Invarianten?
- Inwieweit bestimmt die Topologie einer Mannigfaltigkeit die möglichen Geometrien?

# Topologie und Geometrie von Mannigfaltigkeiten

- Topologie: Studium von Eigenschaften und Invarianten, die unter Homotopieäquivalenzen oder Homöomorphismen invariant sind.
- Geometrie: Studium von metrischen Eigenschaften und Invarianten von Riemannschen Mannigfaltigkeiten
- Zusammenhänge zwischen topologischen und geometrischen Invarianten?
- Inwieweit bestimmt die Topologie einer Mannigfaltigkeit die möglichen Geometrien?

# Ein klassisches Resultat: Der Satz von Gauß-Bonnet

Für eine orientierte, kompakte Riemannsche Fläche $\Sigma$ gilt

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K(x) \, \mathrm{dvol}(x).$$

- $\chi(\Sigma) \in \mathbb{Z}$ ist die Euler-Charakteristik von $\Sigma$.
- $K : \Sigma \to \mathbb{R}$ ist die Krümmung von $\Sigma$.

# Euler-Charakteristik – eine topologische Invariante

- Die Euler-Charakteristik eines zellulären Komplexes $K$ ist definiert als

$$\chi(K) = \#(\text{0-Zellen}) - \#(\text{1-Zellen}) + \#(\text{2-Zellen}) - \dots$$

- Die Euler-Charakteristik hängt nur vom Homotopietyp, also insbesondere *nicht* von der Triangulierung ab.

# Euler-Charakteristik – eine topologische Invariante

- Die Euler-Charakteristik eines zellulären Komplexes $K$ ist definiert als

$$\chi(K) = \#(\text{0-Zellen}) - \#(\text{1-Zellen}) + \#(\text{2-Zellen}) - \dots$$

- Die Euler-Charakteristik hängt nur vom Homotopietyp, also insbesondere *nicht* von der Triangulierung ab.

# Bettizahlen – eine feinere, topologische Invariante

- Die Bettizahlen $b_n(M) \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \geq 0$, eines topologischen Raumes $M$ sind die Dimensionen der Homologiegruppen von $M$ und somit invariant unter Homotopieäquivalenz.
- Es gilt $\chi(M) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n(M)$ (Euler-Poincaré-Formel).

$$
\begin{array}{lll}
b_0 = 1 & b_0 = 1 & b_0 = 1 \\
b_1 = 1 & b_1 = 0 & b_1 = 2 \\
b_2 = 0 & b_2 = 1 & b_2 = 1
\end{array}
$$

# $L^2$-Bettizahlen – eine relativ neue Invariante

- Die $L^2$-Bettizahlen $b_n^{(2)}(M) \in \mathbb{R}^{\geq 0},\ n \geq 0$, wurden von Atiyah durch die Wärmeleitungskerne der Laplace-Operatoren auf der universellen Überlagerung von $M$ definiert.
- $\pi_1(M) = 1 \Rightarrow b_n^{(2)}(M) = b_n(M)$.
- Sie sind Homotopieinvarianten (Dodziuk) und erfüllen

$$\chi(M) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n^{(2)}(M).$$

- Moderne Definition (Lück): Sei $\Gamma = \pi_1(M)$.

$$b_n^{(2)}(M) = \dim_{L(\Gamma)} H_n(L(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\widetilde{M}))$$

Hierbei ist $L(\Gamma) \subset \mathcal{B}(l^2\Gamma)$ die von-Neumann-Algebra von $\Gamma$.

# $L^2$-Bettizahlen – eine relativ neue Invariante

- Die $L^2$-Bettizahlen $b_n^{(2)}(M) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $n \geq 0$, wurden von Atiyah durch die Wärmeleitungskerne der Laplace-Operatoren auf der universellen Überlagerung von $M$ definiert.
- $\pi_1(M) = 1 \Rightarrow b_n^{(2)}(M) = b_n(M)$.
- Sie sind Homotopieinvarianten (Dodziuk) und erfüllen

$$\chi(M) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n^{(2)}(M).$$

- Moderne Definition (Lück): Sei $\Gamma = \pi_1(M)$.

$$b_n^{(2)}(M) = \dim_{L(\Gamma)} H_n\big(L(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\widetilde{M})\big)$$

Hierbei ist $L(\Gamma) \subset \mathcal{B}(l^2\Gamma)$ die von-Neumann-Algebra von $\Gamma$.

# Krümmung – eine geometrische Invariante

- (Schnitt-)Krümmung:
  Für $\dim M = 2$ ist die Krümmung eine Funktion $K : M \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{Länge}(S(x;\epsilon)) = 2\pi\epsilon - \frac{\pi}{3}K(x)\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

- Für $\dim M = n \geq 2$ ist die Krümmung eine Abbildung $K : \mathrm{Gr}(2, TM) \to \mathbb{R}$
- Die Ricci-Krümmung $\mathrm{Ricci} : TM \to \mathbb{R}$ bei $v \in T_xM$ ist die Summe $\sum_{i=1}^{n-1} K(v, w_i)$, wobei $\{v, w_1, \ldots, w_n\}$ eine ON-Basis von $T_xM$ ist.

# Krümmung – eine geometrische Invariante

- (Schnitt-)Krümmung:
  Für $\dim M = 2$ ist die Krümmung eine Funktion $K : M \to \mathbb{R}$ mit
  $$\text{Länge}(S(x;\epsilon)) = 2\pi\epsilon - \frac{\pi}{3}K(x)\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$
- Für $\dim M = n \geq 2$ ist die Krümmung eine Abbildung $K : \mathrm{Gr}(2, TM) \to \mathbb{R}$
- Die Ricci-Krümmung $\mathrm{Ricci} : TM \to \mathbb{R}$ bei $v \in T_xM$ ist die Summe $\sum_{i=1}^{n-1} K(v, w_i)$, wobei $\{v, w_1, \dots, w_n\}$ eine ON-Basis von $T_xM$ ist.

# Krümmung anschaulich: Vergleichsdreiecke

| | |
|---|---|
| $K > 0$ | $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ |
| $K = 0$ | $\mathbb{R}^n, S^1 \times S^1$ |
| $K \leq 0$ | $SL(n,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$ |
| $K < 0$ | $\mathbb{H}^n, \mathbb{C}H^n$ |

- Jede Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ ist asphärisch, d.h. ihre universelle Überlagerung ist zusammenziehbar.

# Krümmung anschaulich: Vergleichsdreiecke

| | |
|---|---|
| $K > 0$ | $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ |
| $K = 0$ | $\mathbb{R}^n, S^1 \times S^1$ |
| $K \leq 0$ | $SL(n,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$ |
| $K < 0$ | $\mathbb{H}^n, \mathbb{C}H^n$ |

- Jede Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ ist asphärisch, d.h. ihre universelle Überlagerung ist zusammenziehbar.

# Volumen und $L^2$-Bettizahlen

## Theorem (Gromov, S.)

*Sei $M$ eine $n$-dimensionale, geschlossene, asphärische Mannigfaltigkeit. Falls $g$ eine Riemannsche Metrik mit* $\mathrm{Ricci}(M,g) \geq -(n-1)g$ *ist, dann*

$$b_i^{(2)}(M) \leq \mathrm{const}_n \, \mathrm{vol}(M,g) \qquad \textit{für alle } i \geq 0.$$

*Insbesondere gilt* $b_i^{(2)}(M) \leq \mathrm{const}_n \, \mathrm{minvol}(M)$*, wobei*

$$\mathrm{minvol}(M) := \inf\bigl\{\mathrm{vol}(M,g);\ -1 \leq K(g) \leq 1\bigr\}.$$

## Theorem (S.)

*Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $\epsilon_n > 0$ so, dass für jede $n$-dimensionale, geschlossene, asphärische Mannigfaltigkeit $M$ gilt:*

$$\mathrm{minvol}(M) < \epsilon_n \Longrightarrow b_i^{(2)}(M) = 0 \qquad \textit{für alle } i \geq 0.$$

# Volumen und $L^2$-Bettizahlen

## Theorem (Gromov, S.)

*Sei $M$ eine $n$-dimensionale, geschlossene, asphärische Mannigfaltigkeit. Falls $g$ eine Riemannsche Metrik mit* $\mathrm{Ricci}(M, g) \geq -(n-1)g$ *ist, dann*

$$b_i^{(2)}(M) \leq \mathrm{const}_n \operatorname{vol}(M, g) \qquad \textit{für alle } i \geq 0.$$

*Insbesondere gilt* $b_i^{(2)}(M) \leq \mathrm{const}_n \operatorname{minvol}(M)$, *wobei*

$$\operatorname{minvol}(M) := \inf\big\{\operatorname{vol}(M, g);\ -1 \leq K(g) \leq 1\big\}.$$

## Theorem (S.)

*Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $\epsilon_n > 0$ so, dass für jede $n$-dimensionale, geschlossene, asphärische Mannigfaltigkeit $M$ gilt:*

$$\operatorname{minvol}(M) < \epsilon_n \Longrightarrow b_i^{(2)}(M) = 0 \quad \textit{für alle } i \geq 0.$$

# Zum Beweis I: Klassische Differentialgeometrie

- Bishop-Gromov-Ungleichung:
  Überdeckung $\mathcal{U}$ von $\widetilde{M}$ durch Bälle von Radius 10 mit Multiplizität $<$ const$_n$.
- $\rightsquigarrow f : \widetilde{M} \to \mathrm{Nerv}(\mathcal{U})^{(n)}$ mit Lipschitz-Konstante $<$ const$_n$.
- Annahme: $\mathcal{U}$ ist äquivariant.
  Dann trifft $f(\widetilde{M})$ nur $<$ const$_n$ vol$(M)$ äquivariante $n$-Zellen.
- In diesem Fall ist $f$ ein Homotopieretrakt, was zur behaupteten Ungleichung führen würde.
- Problem: $\mathcal{U}$ kann i.a. nicht äquivariant konstruiert werden.

# Zum Beweis I: Klassische Differentialgeometrie

- Bishop-Gromov-Ungleichung:
  Überdeckung $\mathcal{U}$ von $\widetilde{M}$ durch Bälle von Radius 10 mit Multiplizität $<$ const$_n$.
- $\rightsquigarrow f : \widetilde{M} \to \mathrm{Nerv}(\mathcal{U})^{(n)}$ mit Lipschitz-Konstante $<$ const$_n$.
- Annahme: $\mathcal{U}$ ist äquivariant.
  Dann trifft $f(\widetilde{M})$ nur $<$ const$_n$ vol$(M)$ äquivariante $n$-Zellen.
- In diesem Fall ist $f$ ein Homotopieretrakt, was zur behaupteten Ungleichung führen würde.
- Problem: $\mathcal{U}$ kann i.a. nicht äquivariant konstruiert werden.

# Zum Beweis II: Randomisierung

- Sei $X$ ein ergodischer $\pi_1(M)$-Wahrscheinlichkeitsraum, und $F \subset \widetilde{M}$ ein messbarer $\pi_1(M)$-Fundamentalbereich.
- Ergodentheorie/Dynamik $\rightsquigarrow$ Konstruktion einer bestimmten, messbaren Familie $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ von Überdeckungen Bällen mit Radius 10 derart, dass $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \gamma U \in \mathcal{U}_{\gamma x}$.

# Zum Beweis II: Randomisierung

- Sei $X$ ein ergodischer $\pi_1(M)$-Wahrscheinlichkeitsraum, und $F \subset \widetilde{M}$ ein messbarer $\pi_1(M)$-Fundamentalbereich.
- Ergodentheorie/Dynamik $\rightsquigarrow$ Konstruktion einer bestimmten, messbaren Familie $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ von Überdeckungen Bällen mit Radius 10 derart, dass $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \gamma U \in \mathcal{U}_{\gamma x}$.

# Zum Beweis II: Randomisierung

- Sei $X$ ein ergodischer $\pi_1(M)$-Wahrscheinlichkeitsraum, und $F \subset \widetilde{M}$ ein messbarer $\pi_1(M)$-Fundamentalbereich.
- Ergodentheorie/Dynamik $\rightsquigarrow$ Konstruktion einer bestimmten, messbaren Familie $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ von Überdeckungen Bällen mit Radius 10 derart, dass $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \gamma U \in \mathcal{U}_{\gamma x}$.
- Betrachte die Zufallsvariable $\omega : X \to \mathbb{N}$

$$\omega(x) = \text{Multiplizität von } \{U \in \mathcal{U}_x;\ \text{Mittelpunkt von } U \in F\}$$

- Der Erwartungswert von $\omega$ ist kleiner als $\mathrm{const}_n \operatorname{vol}(M)$.

# Zum Beweis III: Nicht-kommutative Geometrie

- Es gibt analog eine Nerv-Abbildung (äquivariante Bündelabbildung über $X$)

$$X \times \widetilde{M} \to \{\mathrm{Nerv}(\mathcal{U}_x)\}_{x \in X}.$$

- Diese Bündel über $X$ bilden eine interessante Kategorie (Connes), für die es eine Theorie von $L^2$-Bettizahlen gibt (Gaboriau, S.). Anderes Beispiel für ein solches Bündel: klassifizierende Räume von Holonomiegruppoiden von Blätterungen.
- Sei $L^\infty(X) \rtimes \pi_1(M) \supset L(\pi_1(M))$ das getwistete Produkt der von-Neumann-Algebren $L^\infty(X)$ und $L(\pi_1(M))$. Es gilt:

$$b_n^{(2)}(M) = \dim_{L^\infty(X) \rtimes \Gamma} H_n(L^\infty(X) \rtimes \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\widetilde{M}))$$

- Diese Techniken erlauben es aus der Abschätzung des Erwartungswertes der Multiplizität eine Abschätzung von $b_n^{(2)}(M)$ durch $\mathrm{vol}(M)$ bekommen.

# Zum Beweis III: Nicht-kommutative Geometrie

- Es gibt analog eine Nerv-Abbildung (äquivariante Bündelabbildung über $X$)

$$X \times \widetilde{M} \to \{\mathrm{Nerv}(\mathcal{U}_x)\}_{x \in X}.$$

- Diese Bündel über $X$ bilden eine interessante Kategorie (Connes), für die es eine Theorie von $L^2$-Bettizahlen gibt (Gaboriau, S.). Anderes Beispiel für ein solches Bündel: klassifizierende Räume von Holonomiegruppoiden von Blätterungen.
- Sei $L^\infty(X) \rtimes \pi_1(M) \supset L(\pi_1(M))$ das getwistete Produkt der von-Neumann-Algebren $L^\infty(X)$ und $L(\pi_1(M))$. Es gilt:

$$b_n^{(2)}(M) = \dim_{L^\infty(X) \rtimes \Gamma} H_n\big(L^\infty(X) \rtimes \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\widetilde{M})\big)$$

- Diese Techniken erlauben es aus der Abschätzung des Erwartungswertes der Multiplizität eine Abschätzung von $b_n^{(2)}(M)$ durch $\mathrm{vol}(M)$ bekommen.

# Zum Beweis III: Nicht-kommutative Geometrie

- Es gibt analog eine Nerv-Abbildung (äquivariante Bündelabbildung über $X$)

$$X \times \widetilde{M} \to \{\mathrm{Nerv}(\mathcal{U}_x)\}_{x \in X}.$$

- Diese Bündel über $X$ bilden eine interessante Kategorie (Connes), für die es eine Theorie von $L^2$-Bettizahlen gibt (Gaboriau, S.). Anderes Beispiel für ein solches Bündel: klassifizierende Räume von Holonomiegruppoiden von Blätterungen.
- Sei $L^\infty(X) \rtimes \pi_1(M) \supset L(\pi_1(M))$ das getwistete Produkt der von-Neumann-Algebren $L^\infty(X)$ und $L(\pi_1(M))$. Es gilt:

$$b_n^{(2)}(M) = \dim_{L^\infty(X) \rtimes \Gamma} H_n\big(L^\infty(X) \rtimes \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\widetilde{M})\big)$$

- Diese Techniken erlauben es aus der Abschätzung des Erwartungswertes der Multiplizität eine Abschätzung von $b_n^{(2)}(M)$ durch $\mathrm{vol}(M)$ bekommen.

# Offene Fragen

- Was sind die optimalen Konstanten?
- Kann man in der bewiesenen Ungleichung das minimale Volumen durch das simpliziale Volumen oder die minimale Entropie ersetzen?
- Kann auch die $L^2$-Torsion durch das minimale Volumen abgeschätzt werden?