Prof. Dr. Roman Sauer, Dr. Holger Kammeyer Sommersemester 2020, KIT

SEMINAR: DARSTELLUNGSTHEORIE ENDLICHER GRUPPEN

Blockveranstaltung vom 27.07. bis zum 29.07.2020

Einleitung

Darstellungstheorie spielt in verschiedenen Bereichen der modernen Mathematik eine bedeutende Rolle. Die Idee ist, die innere Struktur einer gegebenen Gruppe zu untersuchen, indem man sie auf geeigneten Vektorräumen wirken lässt. Im Seminar werden wir sehen, was dies genau bedeutet, und uns dabei auf den einfachsten Fall beschränken: alle betrachteten Gruppen sind endlich und alle Vektorräume sind endlichdimensional über den komplexen Zahlen. Unsere Ergebnisse werden Rückschlüsse auf Eigenschaften der Gruppe zulassen. Beispielsweise werden wir beweisen, dass jede Gruppe, deren Ordnung das Quadrat einer Primzahl ist, abelsch sein muss.

Behandelte Themen: Grundbegriffe der Darstellungstheorie, Satz von Maschke, Homomorphismen von Darstellungen, die Orthogonalitätsrelationen von Schur, Charaktere und Klassenfunktionen, reguläre Darstellungen, Gruppenringe und das Faltungsprodukt, Fourieranalysis auf endlichen Gruppen, der Dimensionssatz. Die Referenzen beziehen sich im Folgenden auf die Hauptquelle [Ste12], das über SpringerLink im KIT-Campusnetz elektronisch kostenfrei verfügbar ist.

Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich an alle Studierende des Bachelorstudiengangs und des Lehramts. Als Vorkenntnisse wird lediglich die Lineare Algebra 1 und 2 vorausgesetzt. Vor Seminarbeginn machen Sie sich bitte zur Wiederholung mit den Konventionen und dem Inhalt von [Ste12, Chapter 2] vertraut.

Vortragsprogramm

1: Grundbegriffe der Darstellungstheorie (Kathrin Hessenthaler).
Definition einer Darstellung; Grad (auch: Dimension) einer Darstellung; Beispiele; Äquivalenz von Darstellungen mit Beispiel; die Standarddarstellung von S_n; Unterdarstellungen (auch G-invariante Unterräume); direkte Summen (vgl. 3.1.12; 3.1.14 auslassen); irreduzible Darstellungen mit Beispielen und Gegenbeispielen; Irreduzibilitätskriterium für zweidimensionale Darstellungen.
Literatur: [Ste12, 3.1.1–3.1.19]

2: Der Satz von Maschke (Marina Huber).
zerlegbare und vollständig zerlegbare Darstellungen; Stabilität von Irreduzibilität, Zerlegbarkeit und vollständiger Zerlegbarkeit unter Äquivalenz; unitäre Darstellungen mit Beispiel; der Alternativsatz in Proposition 3.2.3; jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist äquivalent zu einer unitären Darstellung; das Gegenbeispiel 3.2.6; der Satz von Maschke.
Literatur: [Ste12, 3.1.21–3.2.8]

3: Homomorphismen von Darstellungen (Katja Rentschler).
Homomorphismen von Darstellungen; die Notation $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho)$; Kerne und Bilder sind Unterdarstellungen; die Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho)$ (im Fall $\varphi = \rho$ ist das ein Ring mit Multiplikation $\circ$); das Lemma von Schur; irreduzible Darstellungen endlicher abelscher Gruppen sind eindimensional; Diagonalisierbarkeit von Darstellungen endlicher abelscher Gruppen; arbeiten Sie Bemerkung 4.1.11 aus; der Grupppenring $L(G)$ als unitärer Vektorraum; bestimmen Sie die Dimension von $L(G)$ wie in 2.2.2.
Literatur: [Ste12, 4.1.1–4.2.1]

4: Die Orthogonalitätsrelationen von Schur (Jerome Sommerfield, Felix Wolff).
Formulierung der Orthogonalitätsrelationen; die Surjektion

$$P = (T \mapsto T^\sharp)) : \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, W) \to \mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho);$$

Wiederholen Sie die Definition der Spur $\mathrm{Tr}(A)$ einer quadratischen Matrix und zeigen Sie $Tr(AB) = Tr(BA)$; $T^\sharp$ für irreduzible Darstellungen; die darstellende Matrix von P bzgl. der Basis $(E_{ij})_{i,j}$ von $\mathbb{C}^{m\times n}$ im Fall unitärer Darstellungen (vgl. 4.2.4-4.2.7); Beweis der Orthogonalitätsrelationen und Folgerungen.
Literatur: [Ste12, 4.2.2–4.2.10]

5: Charaktere und Klassenfunktionen (Kolja Kühn, Dominik Pabst).
der Charakter einer Darstellung; irreduzible Charaktere; Charakter und Grad; äquivalente Darstellungen haben denselben Charakter; Klassenfunktionen; die Notation $Z(L(G))$; Charaktere sind Klassenfunktionen; $Z(L(G))$ ist ein Untervektorraum von $L(G)$; die Menge $\mathrm{Cl}(G)$ der Konjugationsklassen von G; die Dimension von $Z(L(G))$; die ersten Orthogonalitätsrelationen; Abschätzung der Anzahl von Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen; die Notation $m\varphi$; Multiplizitäten; Charaktere direkter Summen; Berechnung und Eindeutigkeit der Multiplizitäten; das Irreduzibilitätskriterium in 4.3.15.
Literatur: [Ste12, 4.3.1–4.3.15]

6: Die reguläre Darstellung (Valentin Gölz, Nicole Knopf).
der Vektorraum $\mathbb{C}X$; die reguläre Darstellung $L\colon G \to \mathbb{C}G$; L ist unitär; der Charakter von L; die Zerlegung von L in ihre irreduziblen Unterdarstellungen; die Folgerungen in 4.4.5–4.4.9; die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; die Charaktertafel einer endlichen Gruppe; die zweiten Orthogonalitätsrelationen; irreduzible Darstellungen von Produkten endlicher abelscher Gruppen.
Literatur: [Ste12, 4.4.1-4.5.1]

7: Das Faltungsprodukt (Johannes Kunz, Nicolas Pimenidis).
periodische Funktionen auf $\mathbb{Z}$ und ihre Fouriertransformation; Fourierinversion auf zyklischen Gruppen; beweisen Sie alle in 5.1 gemachten Aussagen im Detail; Definition des Faltungsproduktes auf $L(G)$; $L(G)$ als Ring mit Eins; das Zentrum $Z(R)$ eines Ringes R; recherchieren Sie einen Beweis für die Gleichung $Z(\mathbb{C}^{n\times n}) = \mathbb{C}$. (Zentrum des Matrizenringes; vgl. Aufgabe 5.10); das Zentrum des Ringes $L(G)$ ist die Menge der Klassenfunktionen.
Literatur: [Ste12, 5.1.1–5.2.4]

8: Fourieranalysis auf endlichen abelschen Gruppen (Hannah Elsenhans, Svenja Simke).
die duale Gruppe $\widehat{G}$; die Gruppenstruktur auf $\widehat{G}$; beweisen Sie ausführlich Beispiel 5.3.3; lösen Sie Aufgabe 5.13 und zeigen Sie $G = \widehat{\widehat{G}}$ im Allgemeinen (formulieren Sie den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen ohne Beweis); Definition der Fouriertransformation; die Fourierinversion; die Fouriertransformation ist ein $\mathbb{C}$-linearer Ringisomorphismus (ergänzen Sie im Beweis, dass das Einselement auf das Einselement abgebildet wird); explizite Formeln für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Literatur: [Ste12, 5.3.1–5.3.9]

9: Fourieranalysis auf endlichen Gruppen (Julia Gutbrod, Peter Vallendar).
G ist genau dann abelsch, wenn der Gruppenring $L(G)$ kommutativ ist; die Reformulierung $L(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$ des Satzes über die Fouriertransformation für endliche abelsche Gruppen; Definition der Fouriertransformation für endliche Gruppen im Allgemeinen; die Fourierinversion; die Fouriertransformation ist ein C-linearer Ringisomorphismus (ergänzen Sie im Beweis, dass das Einselement auf das Einselement abgebildet wird); beweisen Sie ausführlich Bemerkung 5.5.7 über die Fouriertransformation der Funktionen δ_g.
Literatur: [Ste12, 5.5.1-5.5.7]

10: Der Dimensionssatz (David Hämmerling, Eva Resch).
Definieren Sie ganze algebraische Zahlen wie in 6.1.1 und geben Sie die Beispiele 6.1.2 und 6.1.3; rationale, ganzealgebraische Zahlen sind ganz; die ganzen algebraischen Zahlen bilden einen Ring (vgl. 6.1.6; ohne Beweis—zeigen Sie aber, dass die Menge der ganzen algebraischen Zahlen abgeschlossen ist unter der komplexen Konjugation); Werte von Charakteren sind ganze algebraische Zahlen; die Verschärfung in 6.2.3; der Dimensionssatz; gruppentheoretische Anwendungen (mindestens 6.2.6; falls Zeit bleibt auch 6.2.7 und 6.2.8)
Literatur: [Ste12, 6.1.1-6.1.4, 6.1.6, 6.2.1-6.2.8]

Ablauf des Seminars

Notwendig für die erfolgreiche Teilnahme sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Anwesenheit und aktive Teilnahme bei allen Vorträgen. (Stellen Sie bitte immer Fragen, wenn sie etwas nicht verstehen.)
- Ein Handout von eins bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags enthält.
- Bitte suchen Sie rechtzeitig vor Ihrem Vortrag Herrn Kammeyer auf, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen. Den Stoff Ihres Vortrags sollten Sie bis dahin durchgearbeitet und durchdrungen haben. In der Besprechung geht es *nur noch* um letzte offengebliebene Fragen und die vortragstechnische Aufbereitung.

Hinweise zur Vorbereitung und zum Halten des Vortrags

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote. Dadurch vermeiden Sie Unklarheiten über die Kernaussagen, die Ihr Vortrag enthalten soll (Stichwort: Themaverfehlung).
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Machen Sie einen Probevortrag (versuchen Sie irgendwo einen Raum mit Tafel dafür zu bekommen), um Sicherheit zu gewinnen.
- Die Ausarbeitung und das Handout sind eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen.
- Die Klarheit von Definitionen und Begriffen hat höchste Priorität. Eine unverständliche Definition ist (noch) schlimmer als eine unverständliche Rechnung.
- Versuchen Sie immer den Kern und die Idee einer komplizierten Aussage auszudrücken, bevor Sie ins Detail gehen. Möglichst viele Beispiele machen den Vortrag verständlicher.
- Schreiben Sie lesbar und planen Sie Ihr Tafelbild vorher. Alle Definitionen müssen an der Tafel stehen. Sprechen Sie laut und deutlich.
- Das fachliche Beherrschen des Stoffs ist die Grundlage von allem. Ist diese aber gelegt, versuchen Sie auch einen Vortrag zu halten, dem man gerne zuhört. Kleben Sie nicht zu sehr an Ihrem Zettel. Zeigen Sie Elan. Haben Sie keine Angst vor Zwischenfragen, da Kommunikation mit dem Publikum einen Vortrag immer lebendiger macht. Machen Sie mal eine humorvolle Zwischenbemerkung... Lachen erhöht die Konzentration des Publikums.

Literatur

[Ste12] Benjamin Steinberg, *Representation theory of finite groups*, Universitext, Springer, New York, 2012. An introductory approach. MR2867444

Roman Sauer, roman.sauer@kit.edu, Holger Kammeyer, holger.kammeyer@kit.edu