# Maßäquivalenz hyperbolischer Gitter

Uri Bader Alex Furman Roman Sauer

[1]Technion

[2]University of Illinois at Chicago

[3]WWU Münster

Regensburg, Dezember 2009

# Asymptotische Gruppentheorie

## Kommensurabilität

$\Gamma$ und $\Lambda$ sind **kommensurabel**, wenn es eine $\Gamma \times \Lambda$-Menge $\Omega$ gibt so, dass $\Gamma \curvearrowright \Omega$ und $\Lambda \curvearrowright \Omega$ frei und ko-endlich sind.

## Quasi-Isometrie

$\Gamma$ und $\Lambda$ sind **quasi-isometrisch (QI)**, wenn es einen lokal kompakten $\Gamma \times \Lambda$-Raum $\Omega$ gibt so, dass $\Gamma \curvearrowright \Omega$ und $\Lambda \curvearrowright \Omega$ eigentlich und kokompakt sind.
Man nennt $(\Omega, \mu)$ eine **topologische Korrespondenz** von $\Gamma$ und $\Lambda$.

## Maßäquivalenz

$\Gamma$ und $\Lambda$ sind **maßäquivalent (MÄ)**, wenn es einen Maßraum $(\Omega, \mu)$ mit $\mu$-erhaltender $\Gamma \times \Lambda$-Operation gibt so, dass $\Gamma \curvearrowright \Omega$ und $\Lambda \curvearrowright \Omega$ Fundamentalbereiche von endlichem Maß besitzen.
Man nennt $(\Omega, \mu)$ eine **Maßkorrespondenz** von $\Gamma$ und $\Lambda$.

# Maßäquivalenz im Kontext

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} \Gamma \times \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu) \\ \text{Maßäquivalenz} \end{array} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{QI v. Gruppen} & L^2\text{-Invarianten} & \text{v.N.-Algebren}
\end{tikzcd}$$

# Maßäquivalenz im Kontext

$$
\begin{tikzcd}
& \begin{array}{c} \Gamma \times \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu) \\ \text{Maßäquivalenz} \end{array} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{QI v. Gruppen} & \text{L}^2\text{-Invarianten} & \text{v.N.-Algebren}
\end{tikzcd}
$$

- Jede top. Korr. von amenablen $\Gamma, \Lambda$ besitzt ein invariantes Maß.
- QI-Invarianz von $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ [Shalom]
- QI-Invarianz von $\mathrm{H}^*(\Gamma, \mathbb{R})$ für nilpotentes $\Gamma$ [S]

# Maßäquivalenz im Kontext

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{c}\Gamma \times \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu) \\ \text{Maßäquivalenz}\end{array} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{QI v. Gruppen} & L^2\text{-Invarianten} & \text{v.N.-Algebren}
\end{tikzcd}$$

- Jede top. Korr. von amenablen $\Gamma, \Lambda$ besitzt ein invariantes Maß.
- QI-Invarianz von $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ [Shalom]
- QI-Invarianz von $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$ für nilpotentes $\Gamma$ [S]

- Proportionalität: $\mu(\Lambda\backslash\Omega)\, b_n^{(2)}(\Gamma) = \mu(\Gamma\backslash\Omega)\, b_n^{(2)}(\Lambda)$ [Gaboriau]
- Spektralsequenz für Gruppoide [S-Thom]
- $b_p^{(2)} \leq c_n \operatorname{vol}$ für asph. Mgf. [S]

# Maßäquivalenz im Kontext

$$\Gamma \times \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$$

$$\begin{tikzcd} & \text{Maßäquivalenz} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{QI v. Gruppen} & L^2\text{-Invarianten} & \text{v.N.-Algebren} \end{tikzcd}$$

**QI v. Gruppen**

- Jede top. Korr. von amenablen $\Gamma, \Lambda$ besitzt ein invariantes Maß.
- QI-Invarianz von $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ [Shalom]
- QI-Invarianz von $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$ für nilpotentes $\Gamma$ [S]

**$L^2$-Invarianten**

- Proportionalität: $\mu(\Lambda\backslash\Omega)\, b_n^{(2)}(\Gamma) = \mu(\Gamma\backslash\Omega)\, b_n^{(2)}(\Lambda)$ [Gaboriau]
- Spektralsequenz für Gruppoide [S-Thom]
- $b_p^{(2)} \leq c_n \operatorname{vol}$ für asph. Mgf. [S]

**v.N.-Algebren**

- Morita-Äquiv.: $L^\infty(\Lambda\backslash\Omega) \rtimes \Gamma \sim L^\infty(\Gamma\backslash\Omega) \rtimes \Lambda$
- $b_n^{(2)}$ für v.N.-Alg. [Connes-Shlyakhtenko, Thom]
- v.N. Starrheit [Popa, Ozawa]

# Starrheit und Flexibilität

### Theorem (Connes-Ornstein-Weiss)

*Jede unendliche amenable (auflösbare) Gruppe ist maßäquivalent zu* $\mathbb{Z}$.

### Theorem (Kida)

*Wenn* $\Gamma$ *maßäquivalent zur Abbildungsklassengruppe einer Fläche von Geschlecht* $g \geq 2$ *ist, dann ist* $\Gamma$ *kommensurabel zu dieser.*

# Starrheit und Flexibilität

## Theorem (Connes-Ornstein-Weiss)

*Jede unendliche amenable (auflösbare) Gruppe ist maßäquivalent zu $\mathbb{Z}$.*

## Theorem (Kida)

*Wenn $\Gamma$ maßäquivalent zur Abbildungsklassengruppe einer Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ ist, dann ist $\Gamma$ kommensurabel zu dieser.*

## Grundlegende Frage

*Sei $\Gamma$ maßäquivalent oder quasi-isometrisch zu einem Gitter in einer Liegruppe $G$. Ist $\Gamma$ (bis auf endlichen Index) ein Gitter in $G$?*

- **Für QI** ist die Antwort JA für halbeinfache Liegruppen [Pansu, Kleiner-Leeb, Farb, Eskin, Schwartz].
- **Für MÄ** ist die Antwort JA für halbeinfache Liegruppen von höherem Rang [Zimmer,Furman].
- **Offen:** QI-Klassifikation für nilpotente Liegruppen und MÄ-Klassifikation für Liegruppen von Rang 1.

# Maßäquivalenz hyperbolischer Gitter

## Starrheitsvermutung (für $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$)

*Sei $n \geq 3$. Sei $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ die Isometriegruppe des n-dim. hyperbolischen Raums. Sei $\Gamma < G$ ein Gitter, und sei $\Lambda$ eine zu $\Gamma$ maßäquivalente Gruppe. Dann existiert ein Homomorphismus $\rho : \Lambda \to G$ so, dass $\ker(\rho)$ endlich und $\rho(\Lambda)$ ein Gitter ist.*

- Wir beweisen die Vermutung unter einer zusätzlichen Voraussetzung.
- Für den Beweis ist es wichtig, den **durch die Zusatzaussage nicht-trivialen Fall** $\Lambda = \Gamma$ zuerst zu verstehen.

# Maßäquivalenz hyperbolischer Gitter

## Starrheitsvermutung (für $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$)

*Sei $n \geq 3$. Sei $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ die Isometriegruppe des n-dim. hyperbolischen Raums. Sei $\Gamma < G$ ein Gitter, und sei $\Lambda$ eine zu $\Gamma$ maßäquivalente Gruppe. Dann existiert ein Homomorphismus $\rho : \Lambda \to G$ so, dass $\ker(\rho)$ endlich und $\rho(\Lambda)$ ein Gitter ist.*

**Zusätzlich gilt:** *Ist $(\Omega, \mu)$ eine ergodische Maßkorrespondenz von $\Gamma$ und $\Lambda$, dann gibt es eine messbare Abbildung $\Phi : \Omega \to G$ derart, dass $\Phi$* **äquivariant**, *d.h.*

$$\Phi\big((\gamma, \lambda)\omega\big) = \gamma\Phi(\omega)\rho(\lambda)^{-1},$$

*und $\Phi_*\mu$* **das Haarmaß ist** *auf*

1) *$G$ oder $G^0$ oder*
2) *auf einem Gitter in $G$, das $\Gamma$ und $\rho(\Lambda)$ als Untergruppen von endlichem Index enthält.*

- Wir beweisen die Vermutung unter einer zusätzlichen Voraussetzung.
- Für den Beweis ist es wichtig, den **durch die Zusatzaussage nicht-trivialen Fall** $\Lambda = \Gamma$ zuerst zu verstehen.

# Reduktion auf ein Gitter in $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

## Schwache Starrheitsvermutung (für ein $\Gamma < G$)

*Sei* $\Gamma < G$ *ein Gitter. Sei* $(\Omega, \mu)$ *eine ergodische Maßkorrespondenz von* $\Gamma$ *mit sich selbst. Dann gibt es eine äquivariante messbare Abbildung* $\Phi : \Omega \to G$ *so, dass* $\Phi_* \mu$ *das Haarmaß auf* $G$ *oder* $G^0$ *oder einem Gitter* $\bar{\Gamma} \supset \Gamma$ *mit* $[\bar{\Gamma} : \Gamma] < \infty$ *ist.*

## Reduktionssatz

*Wenn es ein Gitter in* $G$ *gibt, für das die schwache Starrheitsvermutung gilt, dann gilt die Starrheitsvermutung für* $G$*.*

# Reduktion auf ein Gitter in $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

## Schwache Starrheitsvermutung (für ein $\Gamma < G$)

*Sei $\Gamma < G$ ein Gitter. Sei $(\Omega, \mu)$ eine ergodische Maßkorrespondenz von $\Gamma$ mit sich selbst. Dann gibt es eine äquivariante messbare Abbildung $\Phi : \Omega \to G$ so, dass $\Phi_* \mu$ das Haarmaß auf $G$ oder $G^0$ oder einem Gitter $\bar{\Gamma} \supset \Gamma$ mit $[\bar{\Gamma} : \Gamma] < \infty$ ist.*

## Reduktionssatz

*Wenn es ein Gitter in $G$ gibt, für das die schwache Starrheitsvermutung gilt, dann gilt die Starrheitsvermutung für $G$.*

## Beweisidee.

- Sei $(\Omega, \mu)$ eine Maßkorr. von $\Gamma, \Lambda \rightsquigarrow \Phi\colon \Omega \times_\Lambda \Omega \to G$.
- $\Phi(x, y) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)^{-1}$ für $\Phi_i : \Omega \to G$.
- Definiere $\rho\colon \Lambda \to G$, $\rho(\lambda) = \Phi_1(\lambda x)\Phi_1(x)^{-1} = \Phi_2(\lambda y)\Phi_2(y)^{-1}$.
- Dass $\rho(\Lambda)$ ein Gitter ist und $(\Phi_1)_*\mu$ die gesuchten Eigenschaften hat, folgt aus **Ratners Sätzen** über algebraische Maße auf homogenen Räumen. $\square$

## Beschränkte Kohomologie

- Die **beschränkte Kohomologie** $\mathrm{H}_b^*(\Gamma, V)$ von $\Gamma$ mit Koeffizienten in einem $\Gamma$-Banachmodul $V$ ist ähnlich wie Gruppenkohomologie, aber mit beschränkten Abbildungen $\Gamma^k \to V$ definiert.
  Es existiert auch eine funktorielle Definition mittels relativ injektiver Auflösungen [Ivanov, **Burger-Monod**].
- Für ein Gitter $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ erhält man eine rel. injektive Auflösung:

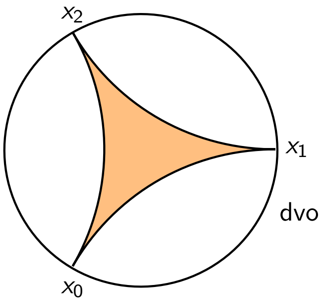
$$V \to \mathrm{L}^\infty(\partial\mathbb{H}^n, V) \to \mathrm{L}^\infty(\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n, V) \to \dots$$

# Beschränkte Kohomologie

- Die **beschränkte Kohomologie** $\mathrm{H}_b^*(\Gamma, V)$ von $\Gamma$ mit Koeffizienten in einem $\Gamma$-Banachmodul $V$ ist ähnlich wie Gruppenkohomologie, aber mit beschränkten Abbildungen $\Gamma^k \to V$ definiert.
  Es existiert auch eine funktorielle Definition mittels relativ injektiver Auflösungen [Ivanov, **Burger-Monod**].
- Für ein Gitter $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ erhält man eine rel. injektive Auflösung:

$$V \to \mathrm{L}^\infty(\partial\mathbb{H}^n, V) \to \mathrm{L}^\infty(\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n, V) \to \dots$$

- $\rightsquigarrow$ Kodierung geometrischer Argumente mit dem Rand $\partial\mathbb{H}^n$ in Kohomologie
- $\rightsquigarrow$ explizite Kozykel




**Volumen-Kozykel:**

$$\mathrm{dvol} \in \mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$$

$$\mathrm{dvol}(x_0, x_1, x_3) = \mathrm{vol}(\blacktriangle)$$

# Kohomologisches Kriterium für Starrheit

Für jede Maßkorrespondenz $\Omega$ von $\Gamma$ und $\Lambda$ existieren folgende Abbildungen [Monod-Shalom]:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathrm{L}^\infty(\Lambda\backslash\Omega)) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{H}_b^n(\Omega)"'] & \mathrm{H}_b^n(\Lambda, \mathrm{L}^\infty(\Gamma\backslash\Omega)) \arrow[d, "\int"] & \\
\mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathrm{H}_b^n(\Lambda, \mathbb{R}) \arrow[r, "\text{Vergiss}"'] & \mathrm{H}^n(\Lambda, \mathbb{R})
\end{tikzcd}
$$

# Kohomologisches Kriterium für Starrheit

Für eine Maßkorrespondenz $\Omega$ eines **kokompakten Gitters** $\Gamma < G^0$ mit sich selbst betrachten wir ($\Lambda = \Gamma$ bezeichnet zweite Kopie!):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathrm{L}^\infty(\Lambda\backslash\Omega)) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{H}_b^n(\Omega)"'] & \mathrm{H}_b^n(\Lambda, \mathrm{L}^\infty(\Gamma\backslash\Omega)) \arrow[d, "\int"] & \\
\mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathrm{H}_b^n(\Lambda, \mathbb{R}) \arrow[r, "\text{Vergiss}"'] & \mathrm{H}^n(\Lambda, \mathbb{R}) \arrow[d, "\wr"] \\
\text{dvol} \arrow[rr, mapsto] & & v_\Omega \in \mathbb{R}\,\text{dvol}_{\Lambda\backslash\mathbb{H}^n}
\end{tikzcd}$$

## Kohomologisches Kriterium

*Seien* $\Gamma$ *und* $(\Omega, \mu)$ *wie oben. Es gilt* $|v_\Omega| \leq 1$*. Falls* $v_\Omega = \pm 1$ *(sprich:* $\Omega$ **maximal***), dann gibt es eine* $\Gamma \times \Gamma$*-äquivariante messb. Abb.* $\Phi \colon \Omega \to G$ *so, dass* $\Phi_*\mu$ *das Haarmaß auf* $G$ *oder* $G^0$ *oder einem Gitter* $\bar{\Gamma} \supset \Gamma$ *mit* $[\bar{\Gamma} : \Gamma] < \infty$ *ist (*$\rightsquigarrow$ **schwache Starrheitsvermutung***).*

# Beweis des kohomologischen Kriteriums

- **Thurstons Beweis** von Mostow-Rigidität: Ein Isomorphismus $f : \Gamma \to \Lambda$ induziert einen ($f$-äquivarianten) Homöomorphismus

$$\partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n$$

- **Furstenberg-Margulis boundary theory**: Eine Maßkorrespondenz $\Omega$ von Gittern $\Gamma$ und $\Lambda$ in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ induziert eine messbare Familie von Abbildungen

$$\phi_x \colon \partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n,\ x \in \Omega.$$

# Beweis des kohomologischen Kriteriums

- **Thurstons Beweis** von Mostow-Rigidität: Ein Isomorphismus $f : \Gamma \to \Lambda$ induziert einen ($f$-äquivarianten) Homöomorphismus

$$\partial \mathbb{H}^n \to \partial \mathbb{H}^n$$

- **Furstenberg-Margulis boundary theory**: Eine Maßkorrespondenz $\Omega$ von Gittern $\Gamma$ und $\Lambda$ in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ induziert eine messbare Familie von Abbildungen

$$\phi_x \colon \partial \mathbb{H}^n \to \partial \mathbb{H}^n,\ x \in \Omega.$$

- Man kann die folgende Abbildung durch $\{\phi_x\}_{x \in \Omega}$ ausdrücken:

$$\mathrm{H}_b^n(\Omega) \colon \mathrm{H}_b^n(\Gamma, \mathrm{L}^\infty(\Lambda \backslash \Omega)) \to \mathrm{H}_b^n(\Lambda, \mathrm{L}^\infty(\Gamma \backslash \Omega))$$

- Maximalität $\Rightarrow$ für fast jedes $x \in \Omega$ **bewahrt** $\phi_x$ **ideale reguläre Simplizes**.

# Starrheit und $L^1$-Maßkorrespondenzen

## Definition (nach Margulis/Shalom)

Sei $\Omega$ eine Maßkorrespondenz von $\Gamma$ und $\Lambda$. Für einen $\Gamma$-Fundamentalbereich $F \subset \Omega$ betrachte

$$\alpha_F \colon \Lambda \times F \to \Gamma \quad \text{definiert durch:} \quad \lambda x \in \alpha_F(\lambda, x) F.$$

Man nennt $\Omega$ **integrierbar**, wenn ein $\Gamma$-Fundamentalbereich $F$ existiert so, dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Funktion

$$F \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \text{ Wortlänge von } \alpha_F(\lambda, x)$$

integrierbar ist, also in $L^1(F)$ liegt (und genauso für $\Lambda \leftrightsquigarrow \Gamma$).

# Starrheit und L¹-Maßkorrespondenzen

## Definition (nach Margulis/Shalom)

Sei $\Omega$ eine Maßkorrespondenz von $\Gamma$ und $\Lambda$. Für einen $\Gamma$-Fundamentalbereich $F \subset \Omega$ betrachte

$$\alpha_F \colon \Lambda \times F \to \Gamma \quad \text{definiert durch:} \quad \lambda x \in \alpha_F(\lambda, x) F.$$

Man nennt $\Omega$ **integrierbar**, wenn ein $\Gamma$-Fundamentalbereich $F$ existiert so, dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Funktion

$$F \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \text{ Wortlänge von } \alpha_F(\lambda, x)$$

integrierbar ist, also in $L^1(F)$ liegt (und genauso für $\Lambda \leftrightsquigarrow \Gamma$).

## Satz

*Sei $n \geq 3$. Sei $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ein Gitter, und sei $\Lambda$ eine Gruppe, die zu $\Gamma$ mittels einer* **integrierbaren** *Maßkorrespondenz maßäquivalent ist. Dann existiert ein Homomorphismus $\rho : \Lambda \to G$ so, dass $\ker(\rho)$ endlich und $\rho(\Lambda)$ ein Gitter in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ist. Ferner…*

# Wozu benötigt man Integrierbarkeit?

- Das kohomologische Kriterium ist i.A. schwer zu verifizieren, da die Abbildung $\mathrm{H}_b^*(\Omega)$ sehr schwer zu analysieren ist.
- Die Integrierbarkeit von $\Omega$ bewirkt, dass eine homologische Version dieser Abb. ($\ell^1$-Homologie $\leftrightsquigarrow$ beschr. Kohomologie) über eine bessere beherrschbare Homologiegruppe (Sobolev-Homologie) faktorisiert.
- Sei $C_k^s(\Gamma)$ die Komplettierung von $\mathbb{R}\Gamma^{k+1}$ bez. der Norm

$$\|\sum_i a_i(\gamma_0^{(i)}, \ldots, \gamma_k^{(i)})\| = \sum_i |a_i| \operatorname{diam}(\gamma_0^{(i)}, \ldots, \gamma_k^{(i)}).$$

- Definiere die **Sobolev-Homologie** als $\mathrm{H}_k^s(\Gamma, E) = \mathrm{H}_k(C_*^s(\Gamma)\hat{\otimes}_\Gamma E)$.

## Satz

*Sei $\Gamma$ eine hyperbolische Gruppe. Dann haben $\mathrm{H}_*^s(\Gamma, E)$ und $\mathrm{H}_*(\Gamma, E)$ das gleiche Bild in der entsprechenden $\ell^1$-Homologie von $\Gamma$.*

# Diskussion & Ausblick

- Berechnungen in beschränkter Kohomologie sehr schwierig. Keine Mayer-Vietoris-Sequenzen: $\mathrm{H}_b^2(F_2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{H}_b^3(F_2, \mathbb{R})$ sind z.B. unendlich-dimensional.
- Zumindest für triviale Koeffizienten gibt es folgende Vermutung [Monod]: Für eine zusammenhängende halbeinfache Liegruppe $G$ mit endlichem Zentrum ist die Vergleichsabbildung

$$\mathrm{H}_b^*(G, \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^*(G, \mathbb{R})$$

  ein Isomorphismus.
- Surjektivität für Rang 1 ist bekannt [Gromov]. Injektivität ist nur für $SL(2, \mathbb{C})$ bekannt ($\leftrightsquigarrow$ Bloch-Wigner Dilogarithmus).

# Diskussion & Ausblick

- Berechnungen in beschränkter Kohomologie sehr schwierig. Keine Mayer-Vietoris-Sequenzen: $\mathrm{H}_b^2(F_2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{H}_b^3(F_2, \mathbb{R})$ sind z.B. unendlich-dimensional.
- Zumindest für triviale Koeffizienten gibt es folgende Vermutung [Monod]: Für eine zusammenhängende halbeinfache Liegruppe $G$ mit endlichem Zentrum ist die Vergleichsabbildung

  $$\mathrm{H}_b^*(G, \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^*(G, \mathbb{R})$$

  ein Isomorphismus.
- Surjektivität für Rang 1 ist bekannt [Gromov]. Injektivität ist nur für $SL(2, \mathbb{C})$ bekannt ($\leftsquigarrow\!\!\!\rightsquigarrow$ Bloch-Wigner Dilogarithmus).

ENDE!